El CONCEPTO MODERNO de la MATEMATICA

Por GABRIEL POVEDA RAMOS

La evolución histórica y cultural de nuestra época está caracterizada por el fenómeno de la rápida expansión del rango de preponderancia de los valores científicos sobre los otros que hasta ahora han sido objeto de la atención y el ejercicio de las facultades intelectuales y sociales del hombre. Hechos históricos cuyo origen puede ya señalarse en los albores de la revolución industrial y cuya secuencia se prolonga durante los dos últimos siglos, han venido siendo síntoma y causa de este proceso de avance de la ciencia hacia los primeros planos de consideración de nuestros problemas. Las mecanización del trabajo, el progreso tecnológico y la aparición de fuentes de energía antes no sospechadas, fueron incidencias que ejercieron un impacto tan marcado en el modo de vida y en el pensamiento colectivos, que han concentrado las preocupaciones de la inteligencia hacia el estudio de las Ciencias de la Naturaleza, en general, y de las Físicas en particular. Y como las ciencias Físicas encontraron con los trabajos de Galileo y Kepler su más poderoso y seguro método heurístico en el planeamiento y tratamiento matemático del fenómeno, debido a esto la importancia y el influjo del conocimiento matemático ha ido creciendo continuamente a una rata cada día mayor, siguiendo según parece la ley exponencial de desenvolvimiento de los procesos históricos. Por esta razón estamos presenciando cómo los métodos y los principios de las matemáticas tienden a infiltrarse más y más en las otras ciencias, y a tomar un papel cada vez más activo en el conocimiento del mundo que constituye la habitación y el ambiente del hombre.

Y siendo las matemáticas un inmenso territorio cuya amplitud crece también rápidamente, todos los que dedican su interés y sus esfuerzos a trabajar en alguno de los campos en que ellas constituyen instrumento indispensable, necesitan alcanzar una visión de conjunto de ellas, que al menos les permita formar un criterio correcto sobre las posibilidades y las limitaciones que su empleo ofrece, y tener una idea acerca de los problemas que hoy confronta su desarrollo y sobre las tareas que están adelantándose para resolverlos. Tal es el caso, por ejemplo, del Ingeniero: a su profesión han contribuído las matemáticas con la mayor parte de su contenido; de ella han salido algunos de los más grandes avances de aquéllas; y actualmente confluyen en uno solo los esfuerzos de muchos investigadores de nuestro tiempo con el fin de resolver diversos problemas del mundo físico, cuya solución depende de la posibilidad de aplicar a ellos las técnicas modernas de la Matemática pura; bástenos citar como ejemplo de lo último el control de la energía de los núcleos, la hidrodinámica de los turbo-propulsores y el desarrollo de computadores analógicos de estructuras mecánicas.

El panorama de la evolución de la matemática

Para un filósofo de los siglos de oro de la civilización helénica, las Matemáticas, aún en la alta posición académica que se les asignaba entonces, eran poca cosa: podría decirse que en la solución de ecuaciones diofánticas y en la fundamentación de la Trigonometría de Hiparco, terminaban sus más avanzadas exploraciones en estos campos. Aritmética llamaban a sus especulaciones numéricas, y Geometría a sus inextricables laberintos de teoremas y escolios, que el genio poderoso de Euclides redujera a un solo cuerpo de doctrina. Lo que aquellos jonios y atenienses conocían de las matemáticas, en comparación con lo que éstas son hoy en día, es como la amplitud limitada del espacio geográfico en que vivieron, comparado con lo que hoy el hombre conoce del universo que lo circunda. Fue por entonces, cuando, a lo largo de un breve período, se produjo una colección de talentos maravillosos, de entre los cuales se destacan los nombres de Pitágoras, Eudoxio, Zenón y Arquimedes. A propósito, los modernos historiadores concuerdan en señalar a Arquimedes como uno de los tres más grandes matemáticos (con Gauss y Newton) que hayan vivido; en su método de exhaución están los gérmenes de los principios del Cálculo, y sus concepciones sobre los fundamentos de la Geometría, anticipan las más profundas investigaciones críticas sobre este problema, investigaciones que culminarían con la obra de Hilbert, ya en nuestro siglo.

Sería demasiado larga la exposición aún más somera de esta ciencia (Reina de las Ciencias, como la llamó Gauss), cuyos progresos en los dos últimos siglos han sido muchas veces mayores que los logrados por sus cultores durante los 20 anteriores. Baste decir que hoy uno de aquellos geómetras geniales o uno de los aritmetistas de Crotona, difícilmente reconocería la fisonomía de estas disciplinas que ellos ayudaron a crear, y que concebían de un modo bien distinto a como hoy aparecen. Para ellos, el número y la forma eran la representación de ideas simples, distintas, de percepción intuitiva inmediata. En cambio, para los modernos, son estos conceptos mucho más abstractos, más generales, y por ende, más exactos; integrados en una estructura gigantesca y armónica, que es lo que constituye la Matemática contemporánea. Lo que sigue interesando al Matemático no difiere en sí mucho de lo que ocupaba a sus colegas egipcios o hindúes; no obstante, que, como es natural, muchos problemas que hoy son objeto de discusión corriente no hubieran podido ser ni siquiera imaginados por aquellos antecesores. Mas, lo que sí es enteramente diferente en la Matemática de este siglo XX, es el sistema de pensamiento con que se enfocan los problemas y se examinan los métodos de análisis que hoy se emplean para resolverlos.

Veamos muy brevemente cómo es la Matemática contemporánea y cuáles son en sus contornos generales, las ideas que sirven de fundamento a todas sus teorías y en que se apoyan todas sus partes. En su forma más completa, este trabajo apenas acaba de ser terminado: en los últimos 4 lustros, una famosa escuela de matemáticos franceses —la de los Bourbaki— se ha consagrado a la tarea de replantear todas las Matemáticas sobre la base de tres ideas fundamentales que ellos han encontrado adecuadas para compendiar toda su obra: según ellos, Algebra, Topología y Orden son los conceptos básicos a partir de los cuales pueden definirse los métodos y sistemas de la Matemática, y de los cuales se desprende el campo de aplicación de tales sistemas y métodos (Meta-matemática). A partir de esos tres conceptos, se construye toda la armadura de la ciencia, en la cual, arriesgando un símil, pudiérmos decir que los miembros principales están ensamblados entre sí, también por tres piezas de unión; piezas que vinculan entre ellos todos los elementos matemáticos y que les sirven, a su vez, como apoyos: son las nociones de clases o conjuntos, de grupo y de función. Los distintos capítulos de las matemáticas no se nos aparecen ya como porciones más o menos inconexas para las cuales los métodos de estudio son particulares de cada una, sin que guarden una relación de coherencia con los de las otras. Nó. Sea que se hable de los números primos, o de la teoría de las trenzas, o de los anillos aritméticos, o de tensores, el matemático actual maneja sus objetos de estudio mediante métodos formales como instrumentos o herramientas que él puede escoger de una colección ya muy completa, que ha sido recogida como resultado de la labor de tantos cerebros; y puede extender sus razonamientos sobre una base sólida estructurada alrededor de las teorías de clases, campos y conjuntos, de las propiedades de la invariancia de las operaciones en grupos y del concepto de relaciones funcionales.

Sin pretender entrar en una discusión técnica de estas materias, sí hemos de ver cómo ha ocurrido esta transformación que ha llevado a la ciencia que nos ocupa a su etapa actual de evolución. Sabemos todos que los siglos XVII y XVIII fueron los que vieron el renacer vigoroso de los estudios matemáticos después de la milenaria postración medieval. El Algebra, que desde Cardano y Ferrari entrara en un estancamiento inexplicable, recibió los aportes de los talentos de hombres como Newton, Descartes, Pascal y Laplace; la Aritmética fue revivida por Fermat y coronada como "Reina de las Matemáticas" por Gauss; y el saber humano fue enriquecido, como ni ellos mismos lo sospecharon, por Leibniz, Newton y Euler con sus portentosas invenciones infinitesimales, que fueron las simientes del moderno Análisis. Durante todo el siglo XIX, los progresos en Matemática cambiaron su ritmo de acelerado a vertiginoso; y pudiera recordarse lo que este crecimiento significó, trayendo a cuento nombres que recuerdan otras tantas innovaciones y descubrimientos: Galois, Cauchy, Cayley, Monge, Lagrange, Klein, Weirstrasse, por sólo mencionar unos pocos.

Pero a medida que se acrecentaba este acervo de conocimientos, los fundamentos, la filosofía general, sobre los cuales se levantara, iban reclamando una mayor y más crítica atención. Y cuando algunas de aquellas brillantes mentalidades dirigieron a este objetivo el esfuerzo de su pensamiento y la meta de sus investigaciones, se hallaron, sorprendidos, con que esos cimientos no habían sido ni más ampliados ni más profundizados desde los tiempos en que los eleatas trabajaban en las 4 operaciones aritméticas. Y algo más: ya algunos de aquéllos, los más perspicaces como Zenón, habían advertido deficiencias y grietas en las bases sobre las cuales sus contemporáneos asentaban la especulación matemática, y aún habían elevado reparos que se habían quedado sin ser absueltos, a propósito de palabras de uso tan frecuente para el matemático, como "cantidad", "número", "continuidad" y "espacio". A todo esto, la Geometría empezaba a tomar rumbos bien imprevistos: incitados por algunas observaciones que adelantara Gauss, varios matemáticos de toda Europa (Bolyai, Lobachewshky y Riemann), comenzaron a adelantarse en el establecimiento de geometrías bien distintas, aparentemente, de la hasta entonces conocida, y encerrada en "Los Elementos" de Euclides, poniendo así de manifiesto la necesidad de revisar las ideas predominantes y corrientes acerca de la fundamentación de la Geometría, y, consecuencialmente, de toda la Matemática.

Pero, fuera porque aún aquella necesidad de reparación no se hiciera apremiante, fuera porque faltaba un hombre que emprendiera la labor de restituír el edificio matemático sobre una base firme, sólida, y tan amplia como para dar cabida a toda la ciencia hasta entonces descubierta y a la que habría de seguir siendo acumulada, es lo cierto que no se hizo este trabajo en el momento en que empezó a necesitarse (mediados del siglo XIX). No obstante, entonces empezaba a abrirse camino una idea que habría de permitir llegar al meollo del problema, y que ha demostrado ser una de las más fecundas en el desarrollo de la ciencia: estudiando ciertos obstáculos con que estaba tropezando en sus investigaciones sobre la estructura lógica de la Aritmética, George Boole llegó a percatarse de la necesidad de hacer todo un sistema completo de deducción y razonamiento dialéctico que fuera como un instrumento propio de las Matemáticas, desechando los patrones de Aristóteles que, aunque habían prestado valiosos servicios a éstas, exhibían deficiencias que los hacían inadecuados para operar sobre los conceptos, las teorías y los territorios nuevos que iban abriéndose ante la marcha de las innovaciones. El resultado del trabajo de Boole fue la celebrada Lógica Simbólica, uno de los productos más ingeniosos de la mente del hombre. Según este método, los juicios, las proposiciones y las deducciones se establecen y se obtienen mediante procedimientos tales como los que usamos en nuestras operaciones algebraicas familiares. Pues bien, apoyándose en la obra de Boole, en los primeros años de este siglo, Bertrand Russell y Alfred N. Whitehead publicaron su monumental obra "Principia Matemática", en la cual ellos quisieron, y lograron reducir a un sistema unificado el problema de la investigación matemática. Allí quedó señalada la importancia que tiene en los principios de la ciencia el concepto de **grupo**, que Galois introdujera en la teoría de las ecuaciones algebraicas y que luego se extendiera a la Geometría Analítica, a la Teoría de los Números, a la Geometría Proyectiva y a todos los demás ramos vecinos. Los "Principia" echaron la base de la Matemática tal como es hoy interpretada por los matemáticos, y establecieron en forma definitiva los lineamientos de sus contornos.

El pensamiento matemático moderno

El siglo XIX presenció, como lo anotamos atrás, un asombroso avance en la investigación matemática. Muchos problemas fundamentales que por largo tiempo habían resistido al esfuerzo de los estudiosos, fueron resueltos o aclarados; nuevas áreas del pensamiento matemático fueron abiertas; se echaron nuevas fundaciones o se reconstruyeron las anteriores en diversos departamentos de la disciplina. Sin embargo, de todos ellos, el desarrollo más revolucionario fue la construcción de geometrías distintas de la euclidiana, mediante la substitución de los axiomas de Euclides por otros diferentes. En particular, la modificación del 5º, llamado el axioma de las paralelas, condujo a resultados inmensamente fructíferos. Fue esta exitosa separación la que estimuló el desarrollo de una base axiomática para otras ramas de la Matemática, que habían sido cultivadas de una manera más o menos intuitiva.

Una conclusión que surgió de esta actividad crítica de los fundamentos de la Matemática, fue que la concepción tradicional de ésta como "Ciencia de la Cantidad" era inadecuada y tendía a conducir a errores. Porque se hizo entonces evidente que las matemáticas se han de ocupar más esencialmente de obtener deducciones a partir de un conjunto dado de axiomas (o postulados). Así vino a reconocerse que ellas son algo mucho más abstracto y "formal" que lo que tradicionalmente se suponía. Más abstracto, puesto que pueden establecerse postulados y teoremas matemáticos referentes a cualquier cosa que sea, y no meramente a un conjunto circunscrito de objetos o de caracteres de objetos. Más formal, porque la validez de una demostración está afirmada en la estructura de las sentencias más bien que en la naturaleza específica de ningún asunto en particular. Los postulados de cualquier capítulo de la Matemática demostrativa no lo son propiamente acerca del espacio, de la cantidad, de las cifras o de las magnitudes mensurables; y cualquier significado especial que quiera asociarse con los términos descriptivos de los postulados, no desempeña ningún papel significativo en el proceso de derivar teoremas. La cuestión que confronta un matemático puro (en contraste con el científico que utiliza las matemáticas para tratar un asunto especial), no es que los postulados que él asume, o las conclusiones que de ellos obtiene, sean verdaderas, sino que las condiciones establecidas sean la consecuencia lógica de las premisas iniciales.

Un territorio de rigurosa abstracción, en el cual ya no podemos guiarnos por los indicios de nuestro pensamiento cuotidiano, no es, ciertamente, un terreno en el cual podamos avanzar con facilidad. Pero ofrece compensaciones a esta dificultad en la forma de una nueva libertad de movimientos y de más frescas interpretaciones. A medida que las matemáticas se hicieron más abstractas, la mente de los hombres se fue emancipando de las connotaciones habituales del lenguaje y pudo construír nuevos sistemas de postulados. De hecho, la formalización llevó al descubrimiento de una gran variedad de sistemas de considerable interés y valor matemático. Algunos de estos sistemas, es verdad, no se prestan a interpretaciones tan obviamente intuitivas, ni son tan accesibles al llamado "sentido común" como lo son la geometría euclidiana o la aritmética alejandrina. Pero esto no constituye objeción de consideración. Porque la intuición, por una parte, es una facultad que por su imprecisa definición es algo muy elástico; y por otra, no puede ser usada sin riesgo como criterio de verdad o de productividad en la búsqueda científica. Pero más aún. No pocas veces se ha visto que capítulos de la Matemática que han sido desarrollados como ejercicio de la especulación pura, y que en un principio parecieron contradecir los preceptos de la intuición aparentemente más incontrovertibles, en un momento dado hallaron interpretaciones y aplicaciones fructíferas en otras ramas del saber. Bástenos mencionar, como ejemplos, solamente dos. La teoría de los números complejos, inicialmente llamados "imaginarios", fue considerada durante más de un siglo como un puro ejercicio intelectivo de operaciones algebraicas y geométricas, hasta que fueron llevados a la Ingeniería para explicar y describir todo el fundamento de los fenómenos periódicos tales como las corrientes alternas y las vibraciones mecánicas. Y el álgebra de clases o booleana, que, de ser lo que pudiéramos llamar retórica matemática, pasó primero a ser el instrumento de algo tan abstracto como la lógica simbólica, y posteriormente, de algo tan real y concreto como el análisis de los circuitos eléctricos, el planeamiento de operaciones tácticas militares, y la fundamentación de la cibernética.

El estudio de las matemáticas puede ser emprendido según una gran variedad de objetivos, y puede ser enfocado desde muchos y diversos puntos de vista. Los críticos modernos, en particular, se empeñan en demostrar que pensamiento matemático es casi sinónimo de pensamiento sistemático, y que sobre la Matemática debe apoyarse todo lo que hayamos de hacer en forma sistematizada. Por eso se ha tratado de hacer hincapié en los aspectos lógicos de ella, presentándola como el estudio de los sistemas abstractos, es decir, algo así como el estudio de juegos en los que intervienen solamente objetos abstractos que se comportan de acuerdo con reglas predeterminadas. Con el fin de lograr lo antes dicho, puede mostrarse cómo los conceptos básicos de esta ciencia se aplican a fines tan familiares como la medida de longitudes, las operaciones comerciales o la correlación de magnitudes físicas; puede mostrarse también, cómo las reglas fundamentales de la Aritmética, por ejemplo las leyes de cierre, la asociatividad y la conmutatividad, se aplican de la misma manera cuando sus operaciones se refieren a la clasificación de conjuntos de objetos, al análisis de argumentos lógicos o a la inferencia estadística.

Cuando quiera que deseamos resolver un problema sistemáticamente, nos vemos llevados, consciente o inconscientemente, a analizar los objetos abstractos con que tenemos que tratar y las reglas que ellos obedecen. Así, traduciendo primero el problema al lenguaje matemático, no sólo eliminamos detalles irrelevantes, sino que nos colocamos en un punto a partir del cual la solución se convierte en un proceso rutinario.

La idea de identificar los hechos actuales con entidades matemáticas abstractas es de particular importancia en las ciencias teóricas, y por tanto, en las aplicadas, que se sustentan sobre las primeras. Valga el siguiente ejemplo: la física del átomo. En este campo, los científicos tratan de construír sistemas matemáticos abstractos cuyos elementos pueden identificarse con protones, electrones y otras cosas que, nótese de paso, nadie ha visto nunca. Si puede comprobarse que el comportamiento y propiedades de un cierto concepto matemático corresponden a las características observadas indirectamente en un electrón, digamos, entonces ese concepto matemático puede ser utilizado como la imagen abstracta del objeto físico. Por supuesto, todo esto es mucho más fácil de decir que de lograr, porque existe siempre la cuestión de si estamos operando con el tipo apropiado de sistema matemático, vale decir, si los objetos reales que estudiamos constituyen una interpretación objetiva admisible de aquél. Es por esto por lo que el problema de hallar un modelo matemático adecuado, es decir, un sistema de conceptos adecuados, acusa capital importancia en todas las ramas de la ciencia.

Muchos de los hombres que han dedicado su existencia y sus mentes extraordinarias a la más noble y pura disciplina que haya sido posible concebir, han buscado definir cuál es el campo de aplicación de la ciencia Matemática, e investigando cuál es el concepto exacto de ella.

De hecho, la historia de tal investigación se confunde con la del estudio mismo de los fundamentos. Recuérdenoslo, si no, la brillante lista de nombres que encabezada por Zenón, a través de los de Euclides, Arquimedes, Viete, Gauss, Cauchy y Riemann, culmina en nuestro siglo con Russell, Hilbert, Peano y los Burbaki. Pero la búsqueda de los elementos en que se asienta tan espléndida y maravillosa construcción como es la de la ciencia exacta, probablemente no ha terminado. En realidad, probablemente nunca ha de terminar. Es que la búsqueda del conocimiento es como la apasionante aventura de la exploración de un continente, en el cual, cada una de las cumbres que se alcanzan sirve sólo para alcanzar a percibir una mayor extensión de verdad desconocida. Para usar el elegante simil de Newmann, "las etapas de la verdad se prolongan sin límite, y el más alto destino de la vida del hombre es el logro de su meta final".