# TEORÍA DE LA PROPORCIÓN PITAGÓRICA

*Guillermo Correa Pabón*

**RESUMEN**

Un aspecto fundamental en la tradición matemática pitagórica, es la descripción de eventos musicales o acústicos, en términos de la Teoría de la Proporción. El artículo destaca sus aspectos fundamentales, su progreso en la concepción euclidiana y permite apreciar su peso filosófico, con el análisis filológico de algunas de sus más importantes definiciones.

**PALABRAS CLAVE**

Euclides, Pitágoras, matemáticas, proporción, música.

**ABSTRACT**

Descriptions of musical or acoustic events in terms of Proportional Theory, are one of the most significant features in the Pythagorean mathematical tradition. This article emphasizes its fundamental aspects, its progress in the Euclidean conception and, with the Philological analysis of some of its more important definitions, allows appreciating its philosophical weight.

**KEYWORDS**

Euclides, Pythagoras, mathematics, proportion, music.

En la tradición matemática pitagórica, y posteriormente, en la euclidiana, era común utilizar la Teoría de la Proporción como un método básico para sus demostraciones y exposiciones matemáticas. Una importantísima conexión general entre música y matemáticas, es la descripción de eventos musicales o acústicos, en términos de esta teoría. En este texto trataremos de reconstruir, a grandes rasgos, aquel desarrollo filosófico-matemático, enfatizando algunos aspectos filológicos importantes.

Los pitagóricos descubrieron que los componentes musicales -tonos e intervalos- podían ser expresados en términos precisos por razones [*rationes*] numéricas.[1] El siguiente pasaje es considerado el primero que establece, que la primera formulación matemática de una ley natural, esto es, la relación entre longitud y tono de las cuerdas vibrantes, número y sonido, es un descubrimiento de la escuela pitagórica:

> "Πυθαγόρας, ὥς φησι Ξενοκράτης, εὕρισκε καὶ τὰ ἐν μουσικῇ διαστήματα οὐ χωρὶς ἀριθμοῦ τὴν γένεσιν ἔχοντα: ἔστι γὰρ σύγκρισις ποσοῦ πρὸς ποσόν. ἐσκοπεῖτο τοίνυν, τίνος συμβαίνοντος

* Docente asociado de la Universidad Pontificia Bolivariana con Maestría en Filología Clásica de la Universidad de Salamanca. Maestría en Filología Hispánica del Consejo Superior de Investigaciones de Madrid (CSIC).
Dirección del autor: guillecp@yahoo.com

Artículo recibido el día 23 de Agosto de 2006 y aprobado por el Comité Editorial, el día 13 de Octubre de 2006.

[1] Hay un acuerdo general en que dicho hallazgo fundó la ciencia acústica y dio origen a un período de especulación del cual se derivó un importante desarrollo en las matemáticas, la filosofía, la cosmología y la astronomía.

> τά τε σύμφωνα γίνεται διαστήματα καὶ τὰ διάφωνα καὶ πᾶν ἡρμοσμένον καὶ ἀνάρμοστον..."[2]
>
> Pitágoras, así lo dice Jenócrates, descubrió que los intervalos musicales deben también su origen, necesariamente, al número, porque consisten en una comparación de una cantidad con otra. Investigó, además, en qué circunstancias los intervalos son concordantes o discordantes y, en general, el origen de toda armonía y desarmonía. [3]

Esta descripcion devela la estrecha relación que guardan las matemáticas con la música, por el hecho mismo de referirse mutuamente a relaciones numéricas, proporciones y medidas. Estas concordancias, expresadas en intervalos o en relaciones numéricas conmensuradas, se explayan y extienden, como lo expresa la Filosofía pitagórica sobre el número, a todo lo existente.

Van der Waerden, fundamentado en un estudio más directo de las fuentes, piensa que a Pitágoras debe acreditarse con la manipulación de los *intervalos armónicos fundamentales*, los cuales habían sido conocidos, incluso desde antes, con el reconocimiento de que el sonido era una derivación de los movimientos del aire.[4] De igual modo, Heath argumenta que Pitágoras hizo la primera exposición acerca de la teoría de las razones [*rationes*] y de la proporción en general aplicada a cantidades conmensurables:

---

[2] Porfirio. *Sobre la Harmonicá de Ptolomeo,* 30.1 -30.8. Texto tomado del TLG.

[3] Esta referencia viene entonces vía circuito, desde Jenócrates, quien es citado por Heráclides, a través del pasaje de este comentario de Porfirio *sobre la Harmonicá de Ptolomeo* (P.31 1-8 Düring). Citado por Guthrie, W. *Hisoria de la Fiosofía*. *I*. P. 215. Sobre la identidad de Heráclides como Heráclides Póntico y el tratamiento con reserva del pasaje, ver Burkert, *Lore and Science,* P. 380-381. Igualmente, Teón de Esmirna en *(Math., P. 56 Hiller)* nos dice que *parece [o generalmente se cree, (* δοκεῖ*) que Pitágoras fue el primero que descubrió las notas concordantes de la escala en sus relaciones mutuas...*

> *..The epoch-making discovery that musical tones depend on numerical proportions, the octave representing the proportion of 2:1, the fifth 3:2, and the fourth 4:3, may with sufficient certainty be attributed to Pythagoras himself, as may the first exposition of the theory of means, and of proportion in general applied to commensurable quantities.* [5]

El punto esencial radica en que los tres intervalos, de octava, quinta y cuarta, fueron considerados primarios, esto es, como los elementos a partir de los cuales se construye cualquier escala o composición musical. Se atribuyó a Pitágoras el mérito de haber percibido que esta estructura básica dependía de varias razones numéricas fijas.

Ahora bien, todo el sistema de la matemática antigua está compendiado en los *Elementos* de Euclides [6] [Στοιχεῖα], escrito hacia el 300 a.C., en Alejandría. Allí presenta los conocimientos geométrico-matemáticos de la

[4] Van der Waerden, B.L., *Die Harmonielehere der Pythagoreer,* En: Hermes 78 (1943) 163-169.

[5] Heath, S.T., *Aristarchus of Samos, The ancient Copernicus*. P. 45.Oxford, 1959. El mismo Heath, en su *A Manual of Greek Mathematics*. Oxford 1931, es un poco más explícito acerca de este asunto cuando afirma*: We may take it as certain that Pythagoras himself discovered that musical harmonies depend on numerical ratios, the octave representing the ratio 2:1 in length of string at the same tension, the fifth 3:2 and the fourth 4:3. This capital discovery must have created a deep impression*...Ver, también, Burnet*., Early Greek Philosophy,*New York: Meridian, 1957. *P.118*.

[6] Muy poca información se tiene de Euclides. De acuerdo con los pasajes del libro de Proclo *In Euclidis elementorum librum primum commentaria* [Comentarios del I Libro de *Los Elementos* de Euclides], sabemos que nació en Alejandría alrededor del año 300 a. C. y que estaba entre los estudiantes de Platón y Arquímedes. La mayoría de fechas de las que se disponen a este respecto se basan en conjeturas y opiniones de Proclo.

De Euclides se conservan más escritos que de cualquier otro matemático de la Antigüedad: su obra más famosa es el tratado matemático *Los Elementos* [*Elementa*]. Este texto, recopilación del conocimiento matemático de la época, se volvió el centro de la enseñanza matemática durante 2000 años, y ha convertido al alejandrino en uno de los principales maestros de matemáticas de la Antigüedad e incluso de todos los tiempos. Euclides también escribió los siguientes libros que aún sobreviven: *Datos* [*Data*]*, Sobre las divisiones* [*Sectio canonis*], *Óptica* [*Optica*], *Fenómenos* [*Faenomena*]. Se le atribuyen también los siguientes libros perdidos: *Lugares geométricos de superficies* (dos libros), *Porismos, Cónicas* (cuatro libros), *Libro de falacias y Elementos de música.*

Grecia clásica, exponiendolos axiomáticamente en los trece libros que lo constituyen.[7] Los *Elementos* recopilan y organizan, en un sistema deductivo con definiciones, axiomas, teoremas y pruebas formales, además de los aportes originales de Euclides, los descubrimientos de matemáticos griegos anteriores como Pitágoras de Samos, Arquitas de Tarento, Eudoxio de Cnido, Teeteto de Atenas, Teodoro de Cirene, Menechmo, Dinostrato, Hermótimo de Colofón y Filipo de Medma.

Casi todo lo que Euclides argumenta acerca de esta Teoría y de otros hallazgos y progresos matemáticos, ya lo había bebido de fuentes anteriores, esto es, de la tradición filosófico-matemática que le precedía. Así lo comenta Proclo:[8]

> οὐ πόλυ δὲ τούτων νεώτερός ἐστιν Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν καὶ πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας, πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελεωσάμενος, ἔτι δὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγών. γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου: καὶ γὰρ ὁ ᾿Αρχιμήδης ἐπιβαλὼν καὶ τῷ πρώτῳ μνη-μονεύει τοῦ Εὐκλείδου [9]
>
> No mucho más joven [que Hermótimo de Colofón y Filipo de Medma, discípulos de Platón] es Euclides, quien compiló *Los*

[7] Posteriormente aumentados con otros dos libros.

[8] Proclo [Proclus de Diadochus] (410/412 - 485) nació en Constantinopla y luego fue enviado a estudiar a Alejandría, donde fue discípulo de Olympiodoro el Viejo, en filosofía, y de Herón, en matemáticas. Posteriormente se desplazó a Atenas para estudiar en la Academia platónica con Plutarco y Syriano. Allí reemplazó a Syriano como director de la Academia, labor que realizó hasta el final de sus días. El título *Diadochus* (sucesor) le fue conferido durante esta época. Proclo refinó y sistematizó las enseñanzas y el pesamiento de Yámblico. Su especulación filosófica abarca todas las influencias aristotélicas, platónicas y neoplatónicas, en particular como fueron unificadas por Plotino y Yámblico. Por la precisión lógica y sutileza de su doctrina ha sido considerado el mayor escolástico del Neoplatonismo.

[9] Proclo, *Euclidis elementorum librum primum commentaria* 68.6-68.15. Texto tomado del TLG.

> *Elementos,* poniendo en orden varios teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos resultados de Teeteto y dando así mismo pruebas incontestables de aquello que sus predecesores sólo habían probado con escaso rigor. Vivió en tiempos del primer Tolomeo, pues Arquímedes, que vino inmediatamente después, menciona a Euclides.

Los *Elementos* describen dos teorías de la proporción, una la presenta en el libro [7. Def. 20].[10] Allí, describe una teoría de proporción de *números* -en la cual operaría la teoría de la proporción musical pitagórica-, que tiene un carácter restringido a los números enteros, ésto es, sólo opera con cantidades conmensurables. La otra, de carácter general, la expone en el libro [5. Def. 5],[11] donde hace referencia a una teoría de proporción de magnitudes y sus relaciones. [12]

Antes de acercarnos a estas definiciones, es útil saber que por *proporción*, en aritmética y geometría, entendemos la relación especial entre un grupo de números o cantidades. En términos generales, según la noción aritmética, proporción es la igualdad de dos razones [*rationes*], entendiendo por razón [*ratio*] la relación entre dos números, definida como el cociente de un número por el otro. Así, la razón de 18 a 6, la expresamos como 18/6 o como 3, lo que indica que 18 contiene a 6 tres veces. La razón de 9 a 3 es también 3, y por tanto, según esta noción, los cuatro números 18, 6 y 9, 3 están en

---

10 Considerando que los *Elementos* muestran una clara separación entre Aritmética y Geometría, el libro VII es considerado el primero de los libros aritméticos.

11 En este libro introduce la noción de proporción que los libros siguientes aplican a magnitudes geométricas.

12 Heath diferencia igualmente la definición de *proporcionaliad de números* [7 Def. 20] y la de *proporcionalidad de magnitudes* [V. Def. 5]. Además, insinúa que, al no unificar sus teorías de la proporcionalidad, Euclides incurre en un error de su propia lógica.

Cfr. Heath. *The thirteen books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg with introduction and commentary*. Three volumes. University Press, Cambridge, 1908. En: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookVII/defVII20.html proporción. Esta proporción se expresa como 18:6::9:3,[13] que se lee "18 es a 6 como 9 es a 3".

La definición de proporcionalidad numérica [7 Def. 20] es la siguiente:

> Κύβος δὲ ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις ἢ [ὁ] ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.[14]
>
> Unos números son proporcionales, cuando el primer es el mismo múltiple o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto.[15]

Esta definición está dada por procesos que corresponden, en términos generales, a las siguientes definiciones: Desde [7 Def. 3] hasta [7 Def. 10] configura el estudio de la proporcionalidad numérica, y en [7 Def. 11], además de hacer su introducción, la utiliza implícitamente en un teorema acerca de la sustracción. De especial interés son las definiciones [7 Def. 3] hasta [7 Def. 6] para *parte*, *partes* y *múltiplos*. En el primer caso, $w$ es el mismo múltiplo de $x$ como $y$ lo es de $z$. Ejemplo 12:6:: 22:11, donde 12 es dos veces 6 y 22 el doble de 11. El segundo caso es el inverso del primero 6:12::22:11, donde 6 es la mitad de 12, y 11 la mitad de 22. El tercer caso 12:16::21:28, donde el primero tiene las mismas partes del segundo, 3 partes de 4, como el tercero del cuarto.[16]

---

13 El matemático inglés William Oughtred en el siglo XVII fue el primero en utilizar el signo "::" para designar la igualdad y el signo "x" en vez de la palabra veces. Además, inventó la regla recta y la regla de cálculo circular.

14 Euclides. *Elementa*, 7, 20.1- 7, 20.2 Texto tomado del TLG.

15 Puertas Castaños, M,L. *Elementos* de Euclides. Ed. Gredos, 1991. Versión tomada de http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm

16 Cfr. Heath, S.T., *Op. cit.* http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookVII/defVII20.html

La proporcionalidad de magnitudes [5. Def. 5], por otro lado, refiere la teoría general de la proporción eudoxiana,[17] aplicada a magnitudes conmensurables e inconmensurables. Es la definición clave del libro 5 e indica las condiciones necesarias y suficientes para que dos relaciones sean iguales, Veamos:

> ᾿Εν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ° ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέ ρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.[18]
>
> Magnitudes en la misma proporción, se dice que son la primera con la segunda y la tercera con la cuarta, cuando, tomando cualquier múltiplo de la primera y de la tercera y de la segunda y la cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda, según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta.

Ésto es, define que dos razones [*rationes*] *a:b* y *c:d* son las mismas *a:b::c:d* cuando, para cualquiera dos enteros *n* y *m,* sucede que si *na* es mayor, igual o menor que *mb*, entonces *nc* es mayor, igual o menor que *md*. Así:

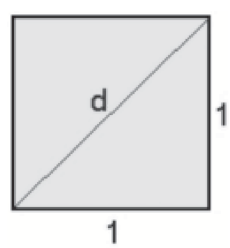
[17] Eudoxo nació en Cnido (hoy Turquía) hacia el 408-355 a.C. Estudió con Platón durante un breve periodo y probablemente viajó a Italia y Sicilia, donde estudió geometría con Arquitas. A él se le atribuye generalmente el descubrimiento de que el año solar tiene 6 horas más de los 365 días, también intentó explicar los movimientos del Sol, la Luna y los planetas mediante un complicado modelo de esferas que giran. También realizó importantes descubrimientos en matemáticas, los que, según Proclo, fueron incluidos en los *Elementos* de Euclides.

[18] Euclides. *Elementa*, 5,5.1- 5,5.6, Texto tomado del TLG. Traducción del profesor Antonio López Eire.

$na > mb$, entonces $nc > md$
$na = mb$, entonces $nc = md$
$na < mb$, entonces $nc < md$
En suma, si $na >=< mb$, entonces $nc >=< md$

Los pitagóricos desarrollaron una teoría de las relaciones, que sólo se aplicaba a magnitudes conmensurables, ésto es, magnitudes discretas,[19] cuya relación se expresa con la ayuda de números enteros, o números racionales positivos, si utilizamos una denominación moderna.[20] Por esta razón, sólo podían comparar dos magnitudes cuando tenían una *unidad* como medida común, es decir, cuando eran múltiplos enteros de dicha *unidad*.

Dicha escuela interpretó las magnitudes como colecciones *discretas* de unidades. De esta manera, dos longitudes estarán en una relación *m:n,* cuando la longitud de un segmento de recta comprende *n unidades,* y la de otro segmento de recta comprende *m unidades*. Cuando los discípulos de Pitágoras trataron de relacionar la diagonal de un cuadrado con uno de sus lados, descubrieron con asombro que las dos magnitudes no tenían una medida común, y por tanto, esta realidad geométrica no podía expresarse con números enteros. Esta diagonal se hacía inconmensurable, puesto que no tenía existencia aritmética, no tenía lugar en la teoría pitagórica de las relaciones.




[19] La teoría euclidiana de números trata con cantidades discretas; las cantidades continuas entran en el ámbito de la geometría.

[20] Es también consenso general creer que la Escuela Pitagórica descubrió la existencia de los números irracionales [inconmensurables], es decir, números que no eran naturales (1,2,3,...), ni enteros (...-3,-2,-1.0,1,2,3,...) ni racionales (fracciones de números enteros 1/3, 3/4, 9/8, - 7/6 ….)

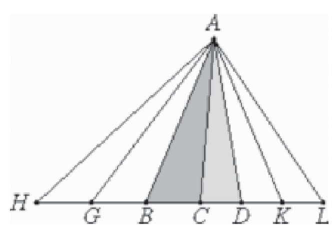
Es decir, si en un cuadrado cuyos lados miden la unidad (catetos 1), calculamos la diagonal (hipotenusa $d$) utilizando el Teorema de Pitágoras, verificamos que, despejando $d$ en la relación pitagórica, obtenemos lo siguiente:

$1^2 + 1^2 = d^2$. Entonces, $d^2 = 2$, y por tanto $d = \sqrt{2}$

El número $\sqrt{2}$ es irracional, puesto que su expresión decimal tiene infinitas cifras no periódicas: 1,4142135623730950488016887242097......

Con esta definición, [V Def. 5], Euclides establece una teoría de proporciones,[21] que supera las estructuras de la aritmética pitagórica, y por tanto, los límites del sistema de los números naturales. El alejandrino sistematizó en sus *Elementos* los aportes de Eudoxo, quien había hecho ya importantes adelantos en la construcción axiomática de la noción de razón entre magnitudes y propiciado el trabajo con razones inconmensurables.

Una buena ilustración para esta definición, nos sugiere Heath,[22] proviene de la proposición [6 Prop. 1] de los *Elementos,* en la cual Euclides usa magnitudes para construir una proporción:




---

[21] Es consenso general aceptar que las matemáticas griegas pueden considerar a esta teoría uno de sus hallazgos más refinados, que puso sobre una base firme a mucha de la geometría que depende del uso de la proporción.

[22] Cfr. Heath, S.T., *Op. cit*. En : http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookV/defV5.html

El objetivo de esta proposición, es mostrar que las líneas son proporcionales a los triángulos, ésto es, que la línea *BC* es a la línea *CD* como el triángulo *ABC* es al triángulo *ACD*. Es decir, que la razón [*ratio*] *BC:CD* de líneas es la misma que la razón *ABC:ACD* de triángulos [*BC:CD*::*ABC:ACD*]. Aunque las razones se derivan de diferentes clases de magnitudes, son comparadas y expuestas como iguales.[23]

La teoría de la proporción pitagórica en música, sobrevivió a pesar de los importantes adelantos y descubrimientos que circundan la figura de Euclides. Según destacados historiadores de este arte, muchos tratadistas antiguos,[24] posteriores a *Los Elementos* no erradicaron, de sus teorías y tratados musicales, la matemática pitagórica, sino que basaron sus conceptos fundamentales en ella, la cual, por su peso filosófico y estrecha relación con las teorías musicales, se postergó a través de estos hasta el Medioevo y parte del Renacimiento.

## *Filología de la Teoría de la Proporción*

El análisis de algunos términos matemáticos, puede ilustrarnos y explicarnos mucho mejor acerca de esta teoría. Veamos:

La palabra λόγος abarca un amplio campo semántico, que nos instala frente a un término que, en su vasto espectro de significación, abarcaba nociones como forma o estructura, definición o aclaración, habla o discurso, sabiduría, razón o argumento, correspondencia, relación o proporción, principio general o norma, fábula o narración etc.,[25] las cuales, como

---

23 *Ibid.*

24 Entre ellos: El *Enchiridion* [*e)nxeiri/don*] de Nicómaco de Gerasa, la *Expositio* [ Ta\ kata\ to\ maqhmatiko\n xrh/sima ei)j th\n Pla/twnoj a)na/gnwsin] de Teón de Esmirna, la *Harmonica* [a(rmonikh\ ei)sagwgh/] de Gaudentius, el *De Institutione Musica* de Boecio….

25 Cfr. Gutrhie, W., *Historia de la Fiosofía I*. P. 396-399. Hace una síntesis interesante de las significaciones del término, alrededor de la época de Heráclito, ésto es, siglo V o antes. Allí mismo, nos remite a un análisis más minucioso sobre el tema en Boeder, H., *der frühgriechische Wortgebrauch von Logos und Aletheia*, En: Archiv für Begriffsgeschichte, 1958, P. 82 y ss.

sabemos, estaban estrechamente relacionadas en la cultura griega. Advertimos además que los griegos en sus diversas manifestaciones en el pensamiento y en el arte, enfocaron muchos de sus elementos desde sus características mensurables y destacaron el concepto de proporción, tanto en su constitución interna como en sus relaciones con las cosas.

*Ahora bien, en el rango que le corresponde en el ámbito matemático,* λόγος *significa* ratio *o proporción.*[26] *Heródoto nos habla de dos cuerdas de lino y cuatro de papiro, diciéndonos que su sutileza y calidad eran idénticas, pero que las de lino eran más pesadas en* λόγος, *y nos da a entender con esto el sentido de* proporcionalidad *y atestigua el uso del término en este sentido.*

> παχύτης μὲν ἦν ἡ αὐτὴ καὶ καλλονή, κατὰ λόγον δὲ ἐμβριθέστερα ἦν τὰ λίνεα, τοῦ τάλαντον ὁ πῆχυς εἷλκε[27]
>
> El grosor y calidad eran las mismas, pero, proporcionalmente, las de lino eran más pesadas; el brazo de la balanza marcaba un peso de un talento.

Guthrie comenta que esta significación estrictamente matemática se generalizaría, haciéndose común, en Platón y Aristóteles; y que, teniendo en consideración las exposiciones en Aristóteles sobre los pitagóricos del siglo V, es muy plausible suponer que estos utilizaran la palabra en este

---

[26] Cfr. Szabó, A., *La Teoria Pitagorica delle proporzioni*, En: *Parola del Pasato-Rivista di Studi Antichi*. Vol., 137. Roma (Marzo- Abril 1971); P. 85.

Szabó argumenta que este término era una denominación puramente científica, que no tenía nada que ver con el lenguaje cotidiano o la vida cotidiana de los griegos.

Cfr. Szabó, A., *Op. cit*. P. 85

[27] Heródoto, *Historias*, libro VII, 36,3. Texto tomado del TLG. Traducción del profesor Antonio López Eire.

sentido.[28] τῶν ἁρμονιῶν ἐν ἀριθμοῖς ὁρῶντες τὰ πάθη καὶ τοὺς λόγους [29]... *viendo las alteraciones y las proporciones de las armonías en los números...* nos dice Aristóteles refiriéndose a las rationes numéricas correspondientes a los intervalos fundamentales, o Platón con respecto al sentido de proporcionalidad καὶ ἀνὰ λόγον μερισθεῖσα καὶ συνδεθει ...*y habiendo sido dividido proporcionalmente*.[30]

Más tarde, Euclides la definió también dentro de una denominación puramente *científica* y, sin duda, como una herencia de los pitagóricos del siglo VI y V a. C., en la cual el vocablo λόγος tenía el sentido de 'cociente entre dos números o dos magnitudes', como en: λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις, *Una* ratio *es una cierta relación de tamaño que hay entre dos magnitudes*.[31] O bien, cuando describe las reglas para la igualdad entre razones, como ya lo hemos descrito en [5 Def. 5].

Ahora bien, la palabra griega para proporción es ἀναλογίᾳ la cual es a su vez un derivado de λόγος, definida por Aristóteles como igualdad o similitud de *rationes*: ἡ γὰρ ἀναλογία ἰσότης ἐστὶ λόγων,... *pues la analogía es una igualdad de proporciones*.[32] Àrpad Szabó argumenta que, inicialmente, el término a)nalogi/a, [33] la forma originaria de nuestro

---

[28] Guthrie,W. *Op. cit.* P. 398. En este mismo contexto se pueden apreciar: ; ἰσότης λόγων Aristot. Nic. Eth. 113a31; λογος τῶν ἁρμονιῶν τοὺς λ. Aristot. Met. 985b32; λόγοι ἀριθμῶν, Aristox.*Harm.*p.32 M.; τοὺς φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν ἀριθμοῦ λ. λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους expresado en relaciones numéricas, Euc. *Sect.Can. Proëm.*

[29] Aristóteles, *Metafísica*. 985b32. Ed. Ross 1924. Trad. Prof. Antonio López Eire.

[30] Platón, *Timeo* 37a. Ed. Burnet 1903. Trad. Prof. Antonio López Eire.

[31] Euclides, *Elementa*, 5. Def 3. Traducción del Prof. Antonio López Eire. En este texto la palabra "tamaño" [πηλικότης] denota la medida de la *ratio*.

[32] Aristóteles, *Ética a Nicómaco* 1131 a 30. Trad. Prof. Antonio López Eire.

[33] Boetio traduce ἀναλογία por *proportionalitas* y λόγος por *proportio*. *Aritmética* II 40. *Ut autem communiter definamus: Proportionalitas est duarum vel plurium proportionum similis habitudo, etiamsi non eisdem quantitatibus et differentiis constitutae sint. Differentia vero est, inter numeros quantitas. Proportio est duorum terminorum ad se invicem quaedam habitudo, et quasi quodammodo continentia. Quorum compositio quod efficit, proportionale est.*

término *analogía*, no pertenecía al lenguaje cotidiano de los griegos en la Antigüedad clásica, sino que tenía un sentido estrictamente técnico, que era *une espressione artificiale del linguaggio cientifico,*[34] una palabra 'culta' que, designaba *proporción* en el lenguaje de la matemática.

Es útil ilustrar que esta palabra fue usada, como préstamo del lenguaje matemático, por los gramáticos de la época alejandrina, para definir una suerte de *semejanza* o *similitud* gramatical, como extensión del significado de *proporción,* utilizado originariamente en el ámbito científico. [35]

Teóricamente, el significado de la palabra moderna *proporción* se conserva en la antigua proposición ἀνὰ λογον ἴσοι La preposición ἀνα` [36] tiene en esta locución un carácter distributivo sobre λόγον esto es, ἀνὰ λογον ἴσοι *numeri uno per uno come logos uguali*,[37] en el caso por ejemplo de cuatro números que estuvieran en proporción *a:b::c:d.*

Posteriormente, Szabó[38] nos dice que la palabra ἀνάλογον que aparece en Euclides, es una abreviación de ἀνὰ λόγον ἴσοι en el sentido de *la misma proporción* [ὁ αὐτός] por ejemplo: τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη ἀνάλογον καλείσθω[39].

---

34 Szabó, A., *Op. cit.* P. 84.

35 Así nos lo trae Dionisio de Tracia en este fragmento:

Dionisio de Tracia, *Ars Grammatica*, 1.1.6.1-1.1.6.3 TLG. τρίτον γλωϲϲῶν τε καὶ ἱϲτοριῶν πρόχειροϲ ἀπόδοϲιϲ, τέταρτον ἐτυμολογίαϲ εὕρεϲιϲ, πέμπτον ἀναλογίαϲ ἐκλογιϲμόϲ, ἕκτον κρίϲιϲ ποιημάτων, ὃ δὴ κάλλιϲτόν ἐϲτι πάντων τῶν ἐν τῇ τέχνῃ.

36 Szabó, A., ΑΝΑΛΟΓΙΑ, En: Acta antigua: Academiae scientiarum Hungaricae 10 (1962): 237-245. Aquí mismo discute el término ἀναλογία y su relación con el adverbio ἀνὰλογου y el adjetivo αναλογος. Además trata las diferencias y similitudes entre ἀνὰ λόγον y κατὰ λόγον, haciéndo énfasis en el carácter distributivo de ἀνὰ con respecto a los números. P. 243.

37 Szabó, A., *La Teoria Pitagorica delle proporzioni*, En: Parola del Pasato-Rivista di Studi Antichi. 137 (1971) P. 85.

38 *Ibid*, P. 85.

39 Euclides, *Elementa.* 5 Def 6. Texto tomado del TLG. Trad. Prof. Antonio López Eire.

Ver también, 6 Def.1; 6 Prop. 6, y 7 Def. 21.

*Y las magnitudes que tienen la misma proporción sean llamadas proporcionales*. O también, en [7 Def. 21], cuando el mismo Euclides define la teoría de la proporción numérica:

> ᾿Αριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέ ρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλά σιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν.[40]
>
> Unos números son proporcionales, cuando el primero es el mismo múltiple o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto.

Y más frecuente que el uso de esta abreviación, Euclides utiliza la expresión ὁ αὐτός λόγος para significar *rationes* iguales, como lo declara en [5 Def. 5] la famosa definición eudoxiana de proporcionalidad de magnitudes: ᾿Εν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύ τερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον...[41]. *magnitudes en la misma proporción se dice que son la primera con la segunda y la tercera con la cuarta...*

Por otro lado, en [5 Def. 8], aparece el término o(/roi con el sentido de que las magnitudes pueden ser descritas en términos de sus límites, ésto es, que los términos de una relación *a:b*, o bien, que las magnitudes involucradas en la *ratio*, y la misma *ratio*, pueden ser descritas con el término o(/roi [límite, frontera].᾿ Αναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν, *la proporción en tres términos es la más breve*.[42]

En este mismo sentido refiere el término Aristóteles cuando nos habla sobre la distribución de los términos de una proporción: ἔσται ἄρα ὡς ὁ α ὅ ρος πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν δ, *por consiguiente: como el*

---

40 Euclides, *Elementa*, 7 Def. 21. Texto tomado del TLG. Trad. del Prof. Antonio López Eire.

41 Euclides, *Elementa* 5 Def. 5. Texto tomado del TLG. Trad. Prof. Antonio López Eire.

42 Euclides, *Elementa*. 5 Def. 8. Texto tomado del TLG. Trad. Prof. Antonio López Eire.

*término primero está en relación con el término segundo, así lo está el tercero con el cuarto.* [43]

En otro pasaje, Aristóteles mismo anota, en sus argumentos contra la concepción pitagórica de número, que aun si los números son considerados como límites o términos [ὅροι], por ejemplo, como los puntos límites de las magnitudes, éstos no pueden ser considerados como las causas de las sustancias y del ser: ...καὶ τοῦ εἶναι, πότερον ὡς ὅροι οἷον αἱ στιγμαὶ τῶν μεγεθῶν, καὶ ὡς Εὔρυτος ἔταττε τίς ἀριθμὸς τίνος,... *y del ser, si son como términos como, por ejemplo, los puntos de las magnitudes y como Eurito establecía, cuál es el número de qué cosa...* [44]

Teniendo en cuenta estas consideraciones, Szabó sugiere que aparte de λόγος, se utilizaba otra palabra, más antigua en su uso, para significar *ratio*. Porfirio nos informa que los pitagóricos y quienes medían cuerdas –incluso Eratóstenes– preferían -διάστημα -'intervalo'- en vez de λόγος para *ratio.*[45] También Platón, en este mismo contexto musical, refiriéndose al 'menor intervalo y la unidad de medida', nos dice:...καὶ σμικρότατον εἶναι τοῦτο διάστημα, ᾧ μετρητέον,[46] *y que este intervalo era el más pequeño con el que había que medir.* Διάστημα se utilizaba con el sentido de intervalo musical, esto es, la distancia de sonido entre dos tonos.

A los intervalos musicales obtenidos en las experimentaciones sobre el monocordio se les denominó διάστημα; el *canon* [κανών] o monocordio, como sabemos, estaba dividido en graduaciones numéricas; por tanto, a dos longitudes diferentes de una cuerda, le eran asignados dos diferentes

---

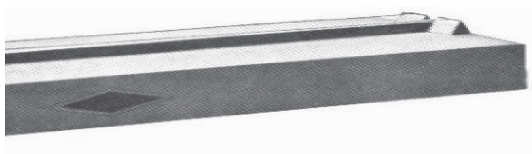
43 Aristóteles, *Ética a Nicómaco* 1131b5 Ed. ed. J. Bywater 1894.Trad. Prof. Antonio López Eire.

44 *Metafísica* 1092.10-11. Ed. Roos 1924.

45 Porfirio, *In Ptol. Comm.*, ed. Düring, 92.22-25

46 Platón, *Republica* 531a Ed Burnet 1903. Trad. Prof. Antonio López Eire.
Ver también: *Frag.* 2 Arquitas, Aristox.*Harm.* p.4 M., Arist.*Pr* .922b6.

números [ὅροι], y a la diferencia de tono entre dos longitudes de cuerda, el intervalo, se le identificaba como la *ratio* [διάστημα] entre dos números; de esta manera, ὅροι του διαστήματος. corresponde a los límites de una relación que contiene un intervalo musical.



Monocordio
(Museo Nacional Germánico de Nuremberg)

El nombre griego para los acordes musicales era el de συμφωνία, ésto es, consonancia de dos sonidos que se reconocen y experimentan como bellos. Ahora bien, el intervalo de esta consonancia, denominado *diástema* [διάστημα] fue descrito por los pitagóricos como la relación entre dos números, así: el de octava era la relación *2:1 (ó 12:6),* el de quinta *3:2 (ó 12:8, 9:6)* y el de cuarta *4:3 (ó 12:9, 8:6)*.

Λόγος, entonces, reemplazó eventualmente a [διάστημα] como la palabra técnica matemática para *ratio*, como resultado de un desarrollo posterior, y el curioso uso de ὅροι para referirse a los números se explica por la fundación matemática de las primeras investigaciones musicales cuyos primeros experimentos proporcionaron terminología y datos a las matemáticas.

El término λόγος en este sentido matemático de *relación, ratio, proporción, intervalo*, ha sido entonces, en términos generales atribuido a los pitagóricos e, indirectamente, a Pitágoras. Su origen yace en la teoría musical pitagórica: λόγος , como la comunicación de la esencia de una cosa, es, en relación con la música, la ratio numérica presente. Ésto es, si se conoce la ratio, se conoce la naturaleza del intervalo, y se puede producirlo. Razonamientos similares pueden llevarse a cabo en el área de la geometría.

Por ejemplo, la ratio 3:4:5 determina la forma de un triángulo rectángulo, y con su ayuda, se puede reproducir un ángulo recto. Por tanto, podemos considerar que λόγος sería, *el grupo o conjunto de números que yacen escondidos en una cosa* y en cuyo uso no sólo puede ser descrito sino reproducido.[47]

La conexión de proporción y música resultante de la ecuación entre διάστημα y λόγος es, entonces, crédito de los pitagóricos, y muy probablemente también las relaciones derivadas de la teoría de la proporción y la doctrina de las medias proporcionales -aritmética, geométrica y harmónica- las cuales, son puestas generalmente en relación con el descubrimiento de Pitágoras y con la teoría pitagórica de la música. La teoría musical pitagórica es, en este contexto, una consecuencia de los métodos prácticos de medición dentro de una concepción numérica del universo.

[47] Ver Burkert, W., *Lore and Science*. P. 440.